Fractional Differential Equations and Stochastic Processes

川西　琢也

April 21, 2025

概要

- 簡単な非整数階微分方程式の解について
- 非整数階微分方程式と Lévy 過程の関係について解説（の前段階まで）.
- 内容は Umarov et.al. (2018), Umarov (2015) （+ Microsoft copilot）による.
  - Umanov et al. (2018)
  - Triangle of stochastic differential equations, Fokker-Plank-Kolmogorov equation, and continuous time random walk.
- 非整数階微分の解説
  - 非整数階微分は積分が入っているので, 系の局所的（微分）ではなく大域的（積分）な性質を表す.
- 半群の生成作用素と微分方程式の解（擬微分作用素）

目次

命題 1.1 (Cauchy Formula for Repeated Integration)

$$
\begin{aligned}
{}_aJ_t^n f(t) = f^{(-n)} &= \int_a^t \int_a^{s_1} \cdots \int_a^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \cdots ds_n ds_1 \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds
\end{aligned}
\tag{1}
$$

┘

定義 1.2 (Fractional Integral)

$$
\boxed{{}_aJ_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau}, \quad t \in (a,b) \tag{2}
$$

Quiz 1.1

Eq. (1) の n の代わりに $\alpha \in \mathbb{R}$ を入れると Eq. (2) となることを確認せよ.

Quiz 1.2

Eq. (1) を数学的帰納法で示せ.

命題 1.3

$$
{}_aJ_t^{\alpha}\,{}_aJ_t^{\beta} = {}_aJ_t^{\beta}\,{}_aJ_t^{\alpha} = {}_aJ_t^{\alpha+\beta}
$$

┘

定義 1.4 (The Riemann-Liouville Fractional Derivative)

正の整数 m があって $m-1 \leq \alpha \leq m$ とする.

$$\boxed{{}_aD_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{(m-\alpha)-1} f(\tau)\, d\tau} \tag{3}$$

定義 1.5 (The Caputo-Djrbashian Fractional Derivative)

$$\boxed{{}_aD_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{(m-\alpha)-1} f^{(m)}(\tau)\, d\tau} \tag{4}$$

備考 1.6

- 非整数階積分の作用と通常の微分の作用を合わせたものである.
- 積分が入っていることで, 積分領域全体の性質を反映している.

非整数階微分 • Liouville-Weyl 型非整数階微分 I

定義 1.7 (LW Forward and Backward Fractional Derivatives)

$$
{}_{-\infty}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{(m-\alpha)-1}f(\tau)\,d\tau
$$

$$
{}_{t}D^{\alpha}_{\infty}f(t) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_{t}^{\infty}(t-\tau)^{(m-\alpha)-1}f(\tau)\,d\tau
$$

非整数階微分 • Liouville-Weyl 型非整数階微分 II

命題 1.8

The symbols of operator ${}_{-\infty}D^{\alpha}$ and ${}_{x}D^{\alpha}_{\infty}$ are

$$(i\xi)^{\alpha} \quad \text{and} (-i\xi)^{\alpha} \tag{5}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
F\left[{}_{\infty}D^{\alpha}\right] &= F\left[D^{m}\,{}_{-\infty}J^{m-\alpha}f\right](\xi) \\
&= (i\xi)^{m}\frac{1}{(i\xi)^{m-\alpha}}F[f](\xi) = (i\xi)^{\alpha}F[f](\xi) \\
F\left[{}_{x}D^{\alpha}_{\infty}f\right](\xi) &= F\left[(-1)^{m}D^{m}\,{}_{x}J^{m-\alpha}_{\infty}f\right](\xi) \\
&= (-1)^{m}(i\xi)^{m}\frac{1}{(-i\xi)^{m-\alpha}}F[f](\xi)
\end{aligned}$$

$\square$

定義 1.9

Let $0 < \alpha < 1$.

$$\mathcal{R}_0^\alpha f(x) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\, dy, \quad C_\alpha = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \tag{6}$$

命題 1.10

$$\mathcal{R}_0^\alpha f(x) = \frac{1}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\left({}_{-\infty}J^\alpha f(x) + {}_xJ_\infty^\alpha f(x)\right) \tag{7}$$

⌟

定義 1.11

$$\mathcal{D}_0^\alpha f(x) = \frac{-1}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}\left({}_{-\infty}D^\alpha f(x) + {}_xD_\infty^\alpha f(x)\right) \tag{8}$$

命題 1.12

The symbol of the Riesz-Feller derivative is

$$\sigma_{\mathcal{D}_0^\alpha}(\xi) = -|\xi|^\alpha \tag{9}$$

⌟

命題 1.13

$$F\left[\mathcal{D}_0^\alpha f\right](\xi) = -|\xi|^\alpha \hat{f}(\xi) \tag{10}$$

⌟

目次

命題 2.1

1 階線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad x(0) = x_0 \tag{11}$$

$$x(t) = e^{ta} x_0 \tag{12}$$

連立微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{13}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA} \boldsymbol{x}_0 \tag{14}$$

PDE, Operator Method（$\mathcal{A}$ が半群の生成作用素の場合）

$$\frac{du(t,x)}{dt} = \mathcal{A}u(t,x), \quad u(0,x) = \varphi(x) \tag{15}$$

$$u(t,x) = e^{t\mathcal{A}} \varphi(x) \tag{16}$$

┘

微分作用素

$$P(D) := \sum_{\alpha} a_\alpha D^\alpha \tag{17}$$

作用素の表象（symbol）

$$P(\xi) = \sum_{\alpha} a_\alpha \xi^\alpha \tag{18}$$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ is a multi-index and

$$D^\alpha := \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(-i\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} \tag{19}$$

$$= (-i\partial_1)^{\alpha_1} \cdots (-i\partial_d)^{\alpha_d} \tag{20}$$

We define Fourier Transform as

$$F[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{i\langle x,\xi\rangle}\,dx \tag{21}$$

定義 2.2 (Pseudo-Differential Operator)

$$P(x,D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle}P(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi \tag{22}$$

ここで $\hat{u}$ は u の Fourier 変換, $P(x,\xi)$ は $P(x,D)$ の表象（symbol）. 擬微分作用素は, 非整数微分でも大丈夫.

備考 2.3

$e^{t\mathcal{A}} = \sum_i P(x, D^i)$ だから, $e^{t\mathcal{A}}$ の表象を $\sigma_{e^{t\mathcal{A}}}$ として

$$e^{t\mathcal{A}}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathrm{R}^d} \sigma_{e^{t\mathcal{A}}}P(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi \tag{23}$$

例 2.4

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \kappa \Delta u(t,x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \tag{24}$$

$$u(0,x) = f(x) \tag{25}$$

where $\Delta = -\left(D_1^2 + \cdots + D_d^2\right)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$. By the operator method

$$u(t,x) = e^{\kappa t \Delta} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\kappa t|\xi|^2} \hat{f}(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi, \quad t > 0$$

The solution is inverse Fourier transform of $e^{-\kappa t|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$. From the table of Fourier transform, we have

$$u(t,x) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi\kappa t}\right)^2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\kappa t}} f(y)\, dy. \tag{26}$$

目次

次の確率微分方程式を考える.

$$dX_t = a(X_t)\,dt + b(X_t)\,dB_t, \quad X_0 = x. \tag{27}$$

ここで B_t はブラウン運動出ある. 次の条件付期待値を考える.

$$u(t,x) = \mathbb{E}^x\left[f(X_t)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_t)|X_0 = x\right] \tag{28}$$

ここで, $f(y)$, $y \in \mathbb{R}$ は 2 回連続微可能で台がコンパクトな関数であるとする. $p(t,y;x)$ を, $X_0 = x$ の条件下における X_t の密度関数（変数は y ）とすると

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)p(t,y;x)\,dy$$

以下, 確率微分方程式 Eq. (27) に対応する $p(t,y;x)$ の微分方程式を導出する.

確率微分方程式 Eq. (27) の積分形（積分系の方が正式, 微分系は積分系の簡易表記）は

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dB_s$$

これに, 伊藤の公式を適用して

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \left\{ a(X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(X_s) + \frac{1}{2}b^2(X_s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s) \right\} ds + \int_0^t b(X_s)\frac{\partial f}{\partial x}(X_s)\,dB_s$$

$X_0 = x$ なるプロセスに対する $f(X_t)$ の期待値を計算

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\, p(t,y;x) = \mathbb{E}\left[f(X_t) | X_0 = x\right] \\
&= f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(X_s) a(X_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s) b^2(X_s) \right\} ds\right] \\
&= f(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\{ a(y)\frac{\partial f}{\partial y}(y) + b^2(y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y) \right\} p(s,y;x)\, dy ds
\end{aligned}
$$

上式を変数 t について微分し，f の台がコンパクトであることを利用して部分積分を行い，B_t の期待値が 0 であることを用いると

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\partial p(t,y;x)}{\partial t}\, dy \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[-\frac{\partial}{\partial y}\big(a(y)p(t,y;x)\big) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(b^2(y)p(t,y;x)\big) \right] dy
\end{aligned}
$$

f は 条件以外は任意であることから次が言える（Focker-Plank Equation）.

$$\frac{\partial p(t,y;x)}{\partial t} = \mathcal{A}^* p(t,y;x) \tag{29}$$

$$p(0,y;x) = \delta_x(y), \quad y \in \mathbb{R}^d \tag{30}$$

$$\mathcal{A}^* \varphi(y) = -\frac{\partial}{\partial y}\Big(a(y)\varphi(y)\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(b^2(y)\varphi(y)\Big) \tag{31}$$

変数 x について空間微分する方程式も導出できて

$$\frac{\partial p(t,y;x)}{\partial t} = \mathcal{A} p(t,y;x) \tag{32}$$

$$p(0,y;x) = \delta_y(x) \tag{33}$$

$$\mathcal{A}\phi(x) = a(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x)\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \tag{34}$$

この節まとめ

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0$$

と

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \left\{ a(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} u(t,x)$$
$$u(0,x) = x_0$$

とが関連づけられた.

目次

非整数階微分方程式の例 • x に関する非整数階微分 I

Ordinary Diffusion Equation

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), \quad p(0,x) = \phi(x)$$

Fractional (w.r.t. x Diffustion Equation

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\kappa \mathcal{D}_0^\alpha u(t,x), \quad p(0,x) = \phi(x)$$

- 右辺の微分作用素の表象は $|\xi|^\alpha$
- 解は
$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\kappa|\xi|^\alpha t} e^{-i\xi x} \hat{\phi}(x)\, d\xi \tag{35}$$
- これは, α-対称 Lévy 過程であり, jump process である.
- 解は Continuous time random walk で近似できる.

非整数階微分方程式の例 • t に関する非整数階微分 I

Fractional (w.r.t. t) Diffusion Equation

$$D^{\beta}_{*,t}u(t,x) = \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad p(0,x) = \phi(x) \tag{36}$$

- 解は

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{\phi}(\xi)E_\beta\left(-\kappa\xi^2 t^\beta\right) \tag{37}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} E_\beta\left(-\kappa\xi^2 t^\beta\right)e^{-i\xi x}\hat{\phi}(\xi)\,d\xi \tag{38}$$

  ここで E_β は Mittag-Leffler 関数である（Copilot に解かせた．要検証）

- 解は確率過程の time change （時間変換）で表現できる．
- 解は continuous time random walk で近似できる．

定義 5.1 (Mittag-Leffler Function)

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{39}$$

$$\text{cf.} \quad \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} \tag{40}$$

備考 5.2

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = 1 - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\lambda^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \cdots \tag{41}$$

Laplace Transform

$$L\left[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)\right](s) = \frac{s^{\alpha-1}}{\lambda + s^\alpha} \tag{42}$$

Appendix • Mittag-Leffler Function II

Umarov (2015) p.138 Consider the following problem

$$D_*^\alpha u(t) + \lambda u(t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u^k(0) = a_k, \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

Applying the Laplace transform

$$(s^\alpha + \lambda)L[u](s) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k s^{\alpha-k-1}$$

Hence

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k L^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\lambda}\right] = \sum_{k=0}^{m-1} a_k J^k E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$$

When $a_0 = 1$ and $a_k = 0$, $k = 1, \ldots, m-1$.

$$u(t) = E_\alpha(-\lambda t^\alpha) \tag{43}$$

References

1. Umarov, Sabir. Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols. Springer (2015).
2. Umarov, Sabir, Marjorie Hahn and Kei Kobayashi. Beyond The Triangle: Brownian Motion, Ito Calculus, And Fokker-Planck Equation - Fractional Generalizations. World Scientific (2018).